Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade

Ao contrário do que acontecia há alguns anos atrás em que a ênfase do ensino e aprendizagem da álgebra era colocada, muito frequentemente, apenas em regras de manipulação de expressões envolvendo variáveis, defende-se, hoje, que a álgebra é, sobretudo, um modo de pensar, um método para ver e expressar relações que proporciona instrumentos poderosos para entender o mundo. Neste contexto destaca-se que o desenvolvimento do pensamento algébrico deve ser um dos objectivos a privilegiar no ensino da Matemática em *todos* os níveis de escolaridade.

Pensamento algébrico: De que falamos?

Consideremos o seguinte problema: Numa sala há cinco pessoas que se cumprimentam todas entre si com um aperto de mão. Ninguém se pode cumprimentar mais do que uma vez. Quantos apertos de mãos são dados?

Pode resolver-se este problema simulando a situação e contando o número de apertos de mãos dados. Este processo, para além de pouco eficaz se o número de pessoas for elevado, não envolve pensamento algébrico, mesmo que em vez de uma simulação se recorra a um esquema para representar o problema. No entanto, se um aluno conseguir descrever como se pode obter o total de apertos de mão independentemente do número de pessoas, ou seja, se passar à generalização, dizemos que pensou algebricamente (Alvarenga e Vale, 2007).

Este exemplo, que será retomado na última parte deste texto, permite destacar um aspecto essencial do pensamento algébrico. Com efeito, embora não haja uma definição consensual sobre o significado deste conceito, há algum consenso em torno da ideia de que se manifesta e desenvolve quando, nomeadamente os alunos se envolvem no processo matemático de generalização tendo por base a observação e análise de dados numéricos, padrões, regularidades ou relações matemáticas e expressam essas generalizações usando recursos diversos que podem passar pela utilização da linguagem natural, diagramas, tabelas, fórmulas ou símbolos matemáticos (Kaput, 2008). Assim, o desenvolvimento do pensamento algébrico pode iniciar-se nos primeiros anos de escolaridade, quando se trabalha em Aritmética, Geometria ou noutras áreas da Matemática.

O NCTM (2000) apresenta quatro itens em torno das quais considera que se deve organizar o trabalho a realizar com os alunos de todos os níveis de ensino, de modo a criar condições favoráveis ao desenvolvimento do seu pensamento algébrico e à aprendizagem da Álgebra:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a mudança em vários contextos.

Estas quatro linhas de força assumem contornos específicos de acordo com o níveis de escolaridade dos alunos, como pode observar-se na tabela 1.

Fonte:
Programa de Formação Contínua em Matemática (2010). *Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade.* Escola Superior de Educação de Setúbal.

Tabela 1. Síntese relativa às normas sobre Álgebra[1]

Itens	*Do pré-escolar ao 2º ano de escolaridade*	*Do 3º ao 5º anos de escolaridade*	*Do 6º ao 8º anos de escolaridade*
Compreender padrões, relações e funções	• agrupar, classificar e ordenar objectos por tamanho, número e outras propriedades • reconhecer, descrever e ampliar padrões, tais como sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples, e traduzi-los de uma forma de representação para outra; • analisar como são gerados tanto os padrões de repetição como os de crescimento	• descrever, ampliar e fazer generalizações acerca de padrões geométricos e numéricos • representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos	• representar, analisar e generalizar padrões diversos, usando tabelas, gráficos, palavras e, quando possível, expressões simbólicas • relacionar e comparar diferentes formas de representar uma relação • identificar funções lineares e não lineares e contrastar as suas propriedades usando tabelas, gráficos ou equações
Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos	• Ilustrar os princípios e propriedades gerais das operações, como a comutatividade, usando números específicos; • usar representações concretas, pictóricas e verbais, para desenvolver uma compreensão de notações simbólicas inventadas e convencionais	• identificar propriedades como a comutatividade, a associatividade e distributividade e aplicá-las no cálculo com números inteiros • representar a ideia de variável como quantidade desconhecida, através de uma letra ou símbolo • expressar relações matemáticas usando equações[2]	• desenvolver uma primeira compreensão conceptual de diferentes utilizações das variáveis • explorar relações entre expressões simbólicas e gráficos lineares dedicando uma atenção particular ao significado de intersecção e declive • usar símbolos algébricos para representar situações e resolver problemas, sobretudo os que envolvem relações lineares • reconhecer e produzir formas equivalentes de expressões algébricas simples e resolver equações lineares
Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas	• Modelar situações que envolvam a adição e a subtracção de números inteiros, usando objectos, figuras e símbolos	• modelar situações problemáticas, usando objectos e recorrer a representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões	• modelar e resolver problemas contextualizados usando várias representações como gráficos, tabelas e equações.
Analisar a mudança (variação) em vários contextos	• descrever a mudança qualitativa, como o facto de um aluno ter crescido; • descrever variações quantitativas, como o facto de um aluno ter crescido 5 cm ao longo de um ano;	• investigar a forma como a mudança numa variável se relaciona com a mudança de uma segunda variável • identificar e descrever situações com taxas de variação constantes ou variáveis e compará-las	usar gráficos para analisar a natureza de mudanças em quantidades em relações lineares.

[1] Adaptação de NCTM (2000)
[2] Na literatura anglo-saxónica a expressão numérica 7+3 = 10 ou “7 + ❋ = 11 são, frequentemente designadas, por “equation”.

Fonte:
Programa de Formação Contínua em Matemática (2010). *Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade.* Escola Superior de Educação de Setúbal.

Desenvolvimento do pensamento algébrico: Aspectos importantes

Quando os alunos iniciam a escolaridade, as actividades de agrupar, classificar e ordenar facilitam o trabalho com padrões. Estas actividades constituem uma forma pela qual os alunos desta faixa etária reconhecem a ordem e organizam o seu mundo. Também quando observam, por exemplo, que a alteração da ordem pela qual dois números são adicionados não afecta a soma ou que a adição de 0 a um número resulta nesse número, ou seja quando observam que as operações aparentam possuir determinadas propriedades, começam a pensar de forma algébrica. O facto de analisarem e reflectirem sobre como as quantidades se relacionam umas com as outras e de representarem situações matemáticas usando objectos, figuras e símbolos, proporciona experiências no campo das relações funcionais e da modelação matemática favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico (NCTM, 2000).

Há muitos estudos que salientam que um ensino da aritmética cuja ênfase é o cálculo em detrimento da compreensão da estrutura do sistema de numeração, das relações entre números e das operações e suas propriedades, não é favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Defendem, assim, a necessidade de uma *compreensão semântica da aritmética* (Cusi e Malara, 2007). Sobretudo nos primeiros anos de escolaridade esta compreensão passa por dedicar uma atenção especial a determinados aspectos, entre os quais estão os que se apresentam em seguida.

Pensar a igualdade como uma relação

Frequentemente, nos primeiros anos de escolaridade, o sinal de igual assume, para os alunos, essencialmente, o significado de *operador direccional* (Cusi e Malara, 2007). Por exemplo, 4+6=10 significa “adicionei 4 a 6 e obtive 10” ou “4 mais seis dá 10”. Esta compreensão cria obstáculos fortes à aprendizagem posterior da álgebra pois aqui o que está em jogo é a compreensão do *significado relacional* deste conceito. Assim, é importante que, desde cedo, os alunos compreendam a igualdade como uma relação. Segundo Kieran (2007) é desejável que o professor proponha tarefas em que

- os alunos se envolvam em discussões acerca de usos apropriados do sinal de igual – exemplo: indicar se são verdadeiras ou falsas, e porquê, igualdades do tipo 3+5=8; 2+3=7; 58+123=115; 11=3+8; 4+5=9+1.
- os alunos sejam encorajados a usar o pensamento relacional e promovam a sua compreensão das propriedades das operações aritméticas, do valor de posição e de outros conceitos aritméticos básicos – exemplos:

  (1) comparar expressões aritméticas sem efectuar os cálculos de modo a indicar se são verdadeiras ou falsas, e porquê, igualdades do tipo[3]: 2+6=8+0; 2+6=0+8; 2+6=2+6; 2+6=6+2; 2+6=8+1; 3+6=8+2;

  (2) sem efectuar os cálculos, completar de modo a obter igualdades verdadeiras, justificando, expressões do tipo: $4+2=\Delta+3$; $4+2=3+\Delta$; $5+3=\Delta+2$; $12+9=10+8+\Delta$; $345+576=342+574+\Delta$.

Em síntese, é importante apresentar e discutir tarefas que incluam igualdades com operações em ambos os membros, para que os alunos os comparem independentemente de

[3] No caso particular das igualdades apresentadas pressupõe-se que, para os alunos, 2+6=8 é já um facto conhecido.

Fonte:
Programa de Formação Contínua em Matemática (2010). *Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade.* Escola Superior de Educação de Setúbal.

recorrerem ou não a cálculos. Este aspecto permite uma expansão do significado do sinal de igual, prefigurando o carácter simétrico e transitivo da relação de igualdade. É, também, importante que os alunos desenvolvam uma perspectiva relacional da igualdade o que envolve, em particular, a comparação de duas expressões aritméticas sem que sejam efectuados cálculos. Esta perspectiva passa pela compreensão das operações aritméticas como relações entre números e não como meras questões de cálculo, o que lhes permite que se souberem, por exemplo, que a igualdade 3+5=3+5 é verdadeira, justificarem que 3+5=4+4 também o é, não meramente porque a soma é a mesma em cada um dos membros da igualdade mas porque se "em 4+4 se retirar 1 ao 1º quatro e o juntarmos ao 2º quatro", os dois membros ficam iguais. Ou seja, começam a entender o sinal de igual não como um sinal que "manda fazer algo" e começam a comparar igualdades com vários termos em cada um dos membros decompondo ou rearranjando alguns números de modo a conservarem o equilíbrio numérico da igualdade. Deste modo, começam a ver as "equações" numéricas de um modo que prefigura o trabalho posterior com equações algébricas.

Trabalhar com expressões numéricas generalizáveis

A igualdade 53-25+25=53 é verdadeira e o mesmo acontece com 124-39+39=124. Se na primeira igualdade estiver 32 em vez de 25 e na segunda 94 em vez de 39, ambas continuam a ser verdadeiras. Em qualquer dos casos há uma quantidade que é retirada e depois acrescentada. Assim, subjacente a qualquer das igualdades, está uma relação matemática que é verdadeira sejam quais forem os números usados[4]. Neste sentido os números -25 e +25, tal como -39 e +39, são *quase-variáveis* e o que está em jogo é o trabalho com expressões numéricas generalizáveis (Kieran, 2007).

Consideremos a tarefa *As subtracções do João*[5]:

O João diz que é muito fácil fazer subtracções com certos números (por exemplo 39-5=34) mas que com outros números as coisas não são assim tão simples como acontece com 32-5 ou com 53-5. Nestes últimos casos diz que o que faz é adicionar 5 e depois subtrair 10: 32-5 = 32+5-10. A seu ver, trabalhar assim é mais fácil.

1. *O método do João permite obter respostas correctas? Experimenta com outros casos. Se o método funcionar, explica porque funciona.*
2. *Imagina como é que o João teria trabalhado a seguinte questão: 73-6=73+☐-10.*
3. *O João diz que o seu método também funciona para subtrair 7, 8 e 9. Mostra como é o João usa o método para efectuar 83-7; 123-8; 253-9. Tenta explicar como é que este método funciona sempre.*

Tarefas deste tipo permitem destacar a natureza potencialmente algébrica de algumas expressões com números e proporcionam ocasiões para pensar nas operações de um modo relacional. Além disso, possibilitam discernir relações numéricas especiais que são sempre verdadeiras independentemente dos números usados, em certas condições, ou seja permitem tratar os números como quase-variáveis. Assim, têm fortes potencialidades para que os alunos comecem a compreender a ideia de variável mesmo que não usem símbolos algébricos para

[4] Tanto 53-25+25=53 como 124-39+39=124 pertencem à classe das expressões algébricas do tipo *a*-*b*+*b*=*a*, que é matematicamente válida sejam quais forem os valores de *a* e *b*.

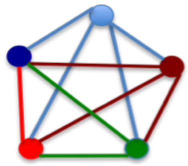
[5] Adaptada de Kieran (2007)

Fonte:
Programa de Formação Contínua em Matemática (2010). *Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade.* Escola Superior de Educação de Setúbal.

representar variáveis. Para que tal aconteça importa, no entanto, que o foco não seja exclusivamente o cálculo, mas antes a observação de padrões que envolvem operações aritméticas numa forma não calculada, de relações especiais e ainda a tomada de consciência da estrutura subjacente a estes padrões ou formas generalizáveis.

Representar ideias e relações matemáticas

Uma das formas de favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico é incentivar e valorizar diferentes formas de representação de ideias e relações matemáticas usando recursos diversos: linguagem natural, símbolos matemáticos, tabelas e gráficos.



Retomemos o problema dos apertos de mão apresentado no início deste texto. Para o resolvermos, podemos recorrer a um esquema (ver exemplo). Por contagem do número de ligações, vemos que, se na sala houver 5 pessoas, são dados 10 apertos de mão. Este esquema, embora mais simples de realizar do que a simulação, continua a não ser muito eficaz se houver muitas pessoas. No entanto, o aluno, por observação, pode constatar que se uma pessoa começar por cumprimentar todas as outras, dá 4 apertos de mão, a segunda dá 3, a terceira 2 e a quarta dá 1, ou seja que se dão 4+3+2+1 apertos de mão. Pode conjecturar, a partir daí, que se forem 12 pessoas serão dados 11+10+....+1 apertos de mãos e, depois, generalizar esta ideia para qualquer número de pessoas.

Consoante a maturidade matemática do aluno, a generalização pode ser expressa por palavras ou recorrendo a simbologia matemática. Os dados podem ser organizados numa tabela e a partir dela identificar um padrão recursivo (tabela 1) ou descobrir padrões que estabelecem uma relação entre o número de pessoas e o número total de apertos de mão (tabela 2).

nº de pessoas	nº de apertos de mão
1	0 +1
2	1 +2
3	3 +3
4	6 +4
5	10 +5
6	15 +6

Tabela 1

nº de pessoas	nº de apertos de mão	
1	0	0
2	1	$\frac{2\times1}{2}$
3	1+2	$\frac{3\times2}{2}$
4	1+2+3	$\frac{4\times3}{2}$
5	1+2+3+4	$\frac{5\times4}{2}$
6	1+2+3+4+5	
7	1+2+3+4+5+6+	
...	...	
n	1+2+3+...+(n-1)	$\frac{n\times(n-1)}{2}$

Tabela 2

As *representações não canónicas de números naturais* são um outro aspecto considerado importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade (Malara e Cusi, 2007). A representação canónica de um número refere-se à quantidade que representa (por exemplo, 12). Este tipo de representação remete para a cardinalidade e diz muito

Fonte:
Programa de Formação Contínua em Matemática (2010). *Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade.* Escola Superior de Educação de Setúbal.

pouco acerca dos números. Por exemplo 12 poderá representar um certo número de coisas ou, quando muito, ser par. No entanto, 12 pode ser representado de muitas outras maneiras que podem ampliar significativamente o campo de informação acerca do próprio número: por exemplo, 2x6 permite destacar que é o dobro de 6, 3x4 remete para que 12 é simultaneamente múltiplo de 3 e de 4; 2^2x3 evidencia que também é múltiplo de 2, $\frac{36}{3}$ mostra que é submúltiplo de 36, etc. 2x6, 3x4, 2^2x3, $\frac{36}{3}$, são, entre muitas outras, representações não canónicas de 12.

É muito importante que os alunos aprendam a ver como apropriada tanto a representação canónica de um número, como quaisquer outras expressões aritméticas de que o número é o resultado (representações não canónicas do número). Este aspecto, não apenas favorece a aceitação e compreensão de expressões algébricas escritas como "a+b" ou "x^2y", mas, sobretudo, facilita a identificação de relações numéricas e a sua representação em termos gerais.

Por último, é de destacar a importância de proporcionar aos alunos tarefas em que o objectivo primeiro seja representar o processo que permite resolvê-las e não o resultado destas resoluções. Consideremos, por exemplo, as seguintes tarefas (Cusi e Malara, 2007):

(1) *Há 13 pássaros pousados nos ramos de uma árvore. Chegaram mais 9 e 6 levantaram voo. Quantos pássaros ficaram na árvore?;*

(2) *Há 13 pássaros pousados nos ramos de uma árvore. Chegaram mais 9 e 6 levantaram voo. Representar em linguagem matemática a situação de modo a que se possa encontrar o número de pássaros que ficaram na árvore.*

Na primeira tarefa o foco é a obtenção de um "produto", ou seja de um resultado (16), enquanto que na segunda o cerne está na identificação do "processo" (13+9-6), isto é, na representação das relações entre os elementos em jogo. Esta diferença relaciona-se com uma das mais significativas descontinuidades epistemológicas entre a aritmética e a álgebra: enquanto a aritmética requer uma procura imediata da resolução, a álgebra adia a procura da resolução e começa por uma transposição do domínio da linguagem natural para um sistema específico de representação (a linguagem algébrica).

Assim, criar condições favoráveis para que os alunos dos primeiros anos de escolaridade desenvolvam o seu pensamento algébrico passa, também, por incentivá-los a focarem-se no "processo", ou seja na representação de expressões numéricas associadas à resolução de problemas numéricos, e não apenas no "produto" das operações envolvidas.

Referências

Alvarenga, D. & Vale, I. (2007) A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, XVI (1), 25-55.

Cusi, A. & Malara, N. (2007). Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante, XVI* (1), 57-80.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, XVI* (1), 5-26.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virgínia: NCTM.

Autoria: Equipa do PFCM da ESE de Setúbal, 2008/2009

Fonte:
Programa de Formação Contínua em Matemática (2010). *Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade.* Escola Superior de Educação de Setúbal.